FÍSICA EXPERIMENTAL I – LABORATÓRIO DE FÍSICA

CONTEÚDO **PÁG.**

DESENVOLVIMENTO DO CURSO

As três primeiras aulas estão reservadas para um estudo introdutório à teoria dos erros, incluindo-se a utilização de gráficos em papel milimetrado e em papel mono-log, com vistas ao tratamento dos dados obtidos no Laboratório. Como exercício poderá ser utilizado um experimento simples, aproveitando partes da experiência A1.
Nas demais aulas serão realizadas experiências, organizadas em **unidades** com três aulas práticas em cada uma das unidades.
Os alunos serão distribuídos em grupos de dois ou três, e cada grupo desenvolverá uma experiência em cada aula.

CONTEÚDO DA APOSTILA

Na sua parte inicial, o texto trata, de forma simples, o assunto que será abordado nas três primeiras aulas: conceitos de Erro, Desvio, Incerteza, Algarismos Significativos, bem como o trabalho com gráficos no tratamento de dados experimentais.
O texto contém os **roteiros** dos experimentos, os modelos das **folhas de dados,** bem como uma sugestão para a elaboração dos cálculos e confecção do relatório de cada um dos experimentos.

1. NOÇÕES SOBRE TEORIA DE ERROS[1]

1.1. ERROS E DESVIOS

Para introduzir a noção de **erros** e **desvios** e entender as diferenças entre estes dois conceitos, estudemos os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Sabemos da geometria euclidiana que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. Suponha que, numa determinada situação experimental, os ângulos internos de um dado triângulo são medidos para se obter sua soma. O procedimento é repetido cinco vezes e os valores encontrados estão tabelados abaixo:

S = soma dos ângulos	Valor Obtido - Valor Real
179,8	-0,2
180,4	0,4
180,0	0,0
180,6	0,6
179,7	-0,3

Exemplo 2: Em condições normais de pressão mediu-se a temperatura da água em ebulição e obteve-se o valor 98,2 °C. A diferença, entre o valor obtido e o valor considerado verdadeiro dessa grandeza, é -1,8 °C.

Exemplo 3: O valor da velocidade da luz no vácuo é 299.792.458 m/s, por definição (leia Anexo na pág 29). Mediu-se a velocidade da luz no vácuo e obteve-se $2{,}99800 \times 10^8$ m/s; mas o valor real da grandeza é conhecido.

Exemplo 4: Mediu-se a aresta de um cubo com uma régua e obteve-se o valor de 1,23 cm. Neste caso, é conhecido o valor real dessa grandeza?

Exemplo 5: Ao se medir a massa de uma substância, obteve-se o valor de 450,6 g. É este o verdadeiro valor dessa grandeza?

Como mostram os exemplos anteriores, algumas grandezas possuem seus valores reais conhecidos e outras não. Entretanto o valor real ou exato da maioria das grandezas físicas nem sempre é conhecido. Quando conhecemos o valor real de uma grandeza, e experimentalmente encontramos um resultado diferente, dizemos que o valor obtido está afetado de um **erro**.

ERRO é a diferença entre um valor obtido ao se medir uma grandeza e o seu valor real ou correto **ERRO = VALOR MEDIDO – VALOR REAL**

[1] Apresentamos uma abordagem muito simplificada do tratamento de dados; recomendamos a quem já concluiu dois semestres de cálculo a leitura do livro: "Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental", de Otaviano Helene e Vito Vanin, Editora Edgard Blucher.

Exercício: Mediram-se os ângulos internos de um quadrilátero e obteve-se, para a sua soma, o valor de $361{,}4^o$. Qual é o erro de que está afetada esta medida?

Quando afirmamos que a aceleração da gravidade vale 9,79 m/s^2 em nosso laboratório, trata-se de seu valor absoluto ou aquele que mais se aproxima do que pode ser considerado o seu valor real? Nestas condições tem sentido falar-se no valor verdadeiro de uma grandeza? Conforme teremos oportunidade de estudar, carece de sentido falar-se em valor real na maioria das medidas.

Apesar de não podermos encontrar o valor real de determinada grandeza podemos adotar, através de critérios que estudaremos oportunamente, um valor que mais se aproxime do valor real, como é o caso da aceleração da gravidade acima citado.

Neste caso, ao efetuarmos uma medida, falamos em **Desvios** e não em **Erros**. Os **Desvios** podem ser apresentados sob três formas:

a) **Desvio Absoluto:** é a diferença entre um valor obtido ao medir-se uma grandeza e um valor adotado que mais se aproxima do valor real. Na prática, trabalha-se na maioria das vezes com desvios e não com erros.

DESVIO ABSOLUTO = VALOR MEDIDO – VALOR ADOTADO

b) **Desvio Relativo:** é a relação entre o desvio absoluto e o valor adotado como o mais próximo do valor real desta grandeza. O desvio relativo nos dá, de certa forma, uma informação a mais acerca da qualidade do processo de medida e nos permite decidir, entre duas medidas, qual foi o processo de medida de melhor qualidade (ver ex. 8).

DESVIO RELATIVO = DESVIO ABSOLUTO / VALOR ADOTADO

c) **Desvio Relativo Percentual:** é obtido, multiplicando-se o desvio relativo por 100 %.

DESVIO RELATIVO PERCENTUAL = DESVIO RELATIVO × 100%

- Quando um mesmo operador efetua uma série de medidas de uma grandeza, utilizando um mesmo instrumento, as medidas obtidas terão valores que poderão não coincidir na maioria das vezes, isso devido a fatores pessoais e acidentais. A teoria para o tratamento estatístico de dados demonstra que:

O valor que mais se aproxima do considerado correto ou real, é a
Média Aritmética dos Valores (V_m).

Exemplo 6: Um operador, ao medir o comprimento de um tubo com uma régua milimetrada, encontrou os seguintes valores: L_1 = 1,2314 m, L_2 = 1,2315 m, L_3 = 1,2314 m, L_4 = 1,2313 m. Neste caso, o valor considerado mais próximo do real é:

$$L_m = (1{,}2314 + 1{,}2315 + 1{,}2314 + 1{,}2313) / 4 = 1{,}2314 \text{ m}$$

Exemplo 7: Adotando-se para a aceleração da gravidade, em determinado local, o valor 9,80 m/s^2 e obtendo-se experimentalmente, no mesmo local, o valor de 9,90 m/s^2, o desvio de que está afetado esta grandeza será:

- Desvio Absoluto = (Valor Obtido - Valor Adotado) = (9,90 - 9,80) = 0,10 m/s^2
- Desvio Relativo = (Desvio Absoluto / Valor Adotado) = 0,10 / 9,80 = 0,01
- Desvio Relativo Percentual = (Desvio Relativo.100 %) = 1%

Exemplo 8: Um operador efetuou, com o mesmo instrumento, a medida do comprimento dos segmentos AB e CD mostrados na figura abaixo. Em cada um dos casos é conhecido o valor mais provável de cada medida.

Segmento AB:
Valor Obtido = 8,00 cm
Valor Mais Provável = 8,40 cm
Desvio Absoluto = 0,40 cm
Desvio Relativo % = (0,40/8,40).100%
≈ 5%

Segmento CD:
Valor Obtido: 19,4 cm
Valor Mais Provável = 20,0 cm
Desvio Absoluto = 0,6 cm
Desvio Relativo % = 3%

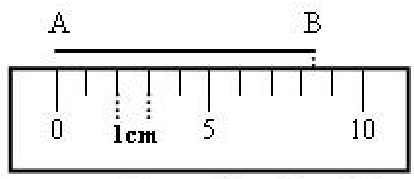
Neste exemplo, observa-se que apesar da medida de **CD** apresentar um desvio absoluto maior (0,6), seu desvio relativo percentual é menor (3%).

Então, entre essas medidas, qual seria aquela cujo processo de medida foi de melhor qualidade?

1.2. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

A necessidade de utilizarem-se instrumentos de medidas leva-nos a conceituar o que chamamos de **algarismos significativos**. Vejamos alguns exemplos:

a) Utilizando-se de uma **régua centimetrada** (dividida em centímetros), conforme ilustra a figura, podemos observar que o comprimento AB pode ser avaliado em 8,3 cm.



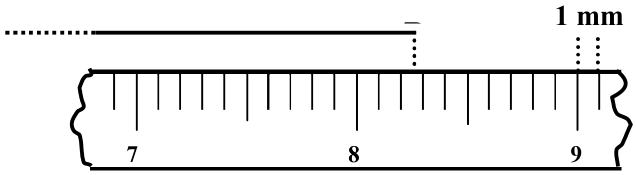
Régua centimetrada: AB = 8,3 cm

Observe que, sendo o comprimento do segmento AB = 8,3 cm, temos os algarismos 8 e 3, onde 8 é **exato** e 3 é **avaliado** (observe que um segundo observador poderia considerar 8,2 cm ou 8,4 cm). Por esse motivo denominamos o algarismo 3 de **duvidoso**.

Assim, **uma grandeza medida deve apresentar um algarismo chamado de avaliado ou duvidoso, além dos algarismos exatos**. Então, podemos esquematizar o conceito de algarismos significativos, da seguinte forma:

ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS = EXATO(S) + DUVIDOSO (o último)

b) Se utilizarmos uma **régua comum, milimetrada**, para medir o mesmo segmento, podemos ter uma situação conforme está ilustrado a seguir, numa visão ampliada de uma parte da régua e desse segmento AB. Neste caso podemos avaliar o seu comprimento:



Régua milimetrada:
AB = 8.26 cm

AB = 8,26 cm: aqui, os algarismos exatos são 8 e 2 ao passo que o duvidoso é 6, uma vez que a sua obtenção surgiu de uma apreciação do experimentador.

c) Se utilizássemos um **paquímetro**, poderíamos obter para a grandeza em foco um valor de 8,271 cm. Neste caso, quais os algarismos duvidosos e quais os exatos? Já um **micrômetro** nos permitiria obter um valor que poderia ser 8,2713 cm.

Veja agora um resumo da medida de **AB** com os diferentes instrumentos:

Instrumento	**Menor Divisão**	**Comprimento (cm)**	**N.º de Algarismos Significativos**
Régua em cm	1 cm	8,3	2
Régua comum	0,1 cm	8,26	3
Paquímetro	0,01 cm	8,271	4
Micrômetro	0,001 cm	8,2713	5

O instrumento de menor divisão poderá medir a mesma grandeza com um número maior de algarismos significativos. Evidentemente poderíamos utilizar outros métodos para mensurar esta grandeza e obtermos uma precisão melhor. Mas, estaríamos chegando ao verdadeiro valor da grandeza? Ou apenas nos aproximando de seu valor mais provável? Desta forma, precisamos prestar atenção no seguinte:

- **Quando efetuarmos uma medida qualquer, devemos apresentar o valor da grandeza com todos os seus algarismos significativos, inclusive o último que é duvidoso;**
- **Podemos apresentar uma grandeza de várias formas, desde que não alteremos o número de seus algarismos significativos.**

Em relação a esta última observação, veja o exemplo a seguir (ex. 9).

Exemplo 9: Um estudante determinou a massa de um objeto: obteve m = 0,02130 kg. Esta grandeza foi obtida com 4 algarismos significativos (2,1,3 e 0).

Observe que o zero à direita é significativo (surgiu de uma avaliação) ao passo que os da esquerda não. Assim poderíamos escrever também:

$$m = 2{,}130E10^{-2}\ kg = 2{,}130E10\ g = 21{,}30\ g = 21{,}30E10^{-3}\ kg$$

Observe que em todas as formas apresentadas acima a grandeza continuou com **quatro algarismos significativos**. Qualquer representação da mesma que altere o número de algarismos significativos é **incorreta**.

Por exemplo, 2,13E10^{-2} kg estaria errado. Neste caso o algarismo duvidoso agora é o 3, e a grandeza passou a ter 3 algarismos significativos.

Utilizando esta representação, você agora pode compreender que o resultado 5 m/s não é idêntico a 5,00 m/s. Por quê?

Como o valor de uma grandeza não deve apresentar mais do que um algarismo duvidoso, torna-se desnecessário apresentar resultados experimentais com algarismos que não possuam qualquer significado.

1.3. INCERTEZAS

a) Incerteza absoluta

Conforme já vimos, ao medirmos uma grandeza, o seu valor será dado pelos algarismos efetivamente **gravados** numa escala e quando possível por mais um algarismo avaliado a critério do operador, chamado de duvidoso. Assim, utilizando-se uma régua comum encontramos para um dado comprimento AB, citado no exemplo anterior, o valor de 8,26 cm.

O algarismo seis é o **duvidoso**; desta forma, dizemos que ele está **afetado** de uma **incerteza**.

Como geralmente não conhecemos se o valor da incerteza é para mais ou para menos (ou seja, seu sinal) adota-se um valor **± Δ** que cobrirá um intervalo igual a 2 | Δ | em torno do valor medido.

Assim, define-se como incerteza absoluta o valor **± Δ**.

INCERTEZA ABSOLUTA = ± Δ

A amplitude dessa incerteza é fixada pelo operador e depende da sua perícia, da facilidade de leitura, do procedimento, e do próprio aparelho ou instrumento utilizado.

Retornando ao exemplo anterior (medida do comprimento AB), podemos adotar para uma medida feita com uma régua, uma incerteza igual a ± 0,2 mm. Então, o comprimento do segmento AB deverá ser corretamente apresentado da seguinte forma:

AB = (8,26 ± 0,02) cm

b) Incerteza relativa e incerteza relativa percentual

É a razão entre a incerteza absoluta adotada na medição do valor de uma grandeza e o valor desta grandeza. Da mesma forma que o desvio relativo, a incerteza relativa nos dará uma **apreciação da qualidade da medida** e é freqüentemente representada na forma percentual.

INCERT. RELATIVA = INCERT. ABSOL. / VALOR DA GRANDEZA

e

INCERT. RELATIVA PERCENTUAL = INCERT. RELATIVA × 100%

Com relação à medida do comprimento AB, temos as incertezas relativa e relativa percentual:

Incerteza Relativa = 0,02 cm / 8,26 cm = 0,0024 ou 0,24%

Observação: No caso de uma única medida, falaremos sempre em incerteza e não em desvio ou erro, visto não conhecermos nem o valor real e nem o valor mais aproximado da grandeza.

1.4. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS – CRÍTICA AO RESULTADO DA MEDIÇÃO DE UMA GRANDEZA

O valor de uma grandeza poderá ser obtido diretamente (medida de um comprimento, massa, tempo, etc.) ou indiretamente (medida de aceleração, pressão, força, volume, etc.).

Nas medidas indiretas o valor da grandeza final dependerá das incertezas de cada uma das grandezas obtidas direta ou indiretamente, bem como da forma da expressão matemática utilizada para obtê-las.

Por exemplo, no cálculo de uma dada pressão P = F/A a força F e a área A apresentam incertezas que afetarão o valor final de P. Examinaremos então, como se obtém a incerteza do valor da grandeza (P), que se mede indiretamente, em função das incertezas das medidas diretas (F e A).

a) Soma ou Subtração

Efetuaram-se as medidas de **n** grandezas: A, B, C... etc. e avaliaram-se suas respectivas incertezas:

$$\left.\begin{array}{l} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta d \\ C = c \pm \Delta c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a, b, c, \ldots = \text{valores medidos} \\ \pm \Delta a, \pm \Delta b, \pm \Delta c, \ldots = \text{incertezas absolutas} \end{array}$$

$$S = A + B + C + \ldots$$

$$S = s \pm \Delta s \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} s = \text{valor calculado da soma} \\ \pm \Delta s = \text{incerteza absoluta da soma} \end{array}$$

$$s \pm \Delta s = a \pm \Delta a + b \pm \Delta b + c \pm \Delta c + \ldots \qquad (1)$$

$$s = a + b + c + \ldots \qquad (2)$$

Subtraindo (2) de (1):

$$\pm \Delta s = \pm \ \Delta a \ \pm \ \Delta b \pm \ \Delta c \ \ldots$$

Adotaremos o critério mais desfavorável, isto é, consideraremos que todas as incertezas possuam o mesmo sinal e, assim, obteremos a seguinte relação para a incerteza absoluta da soma ou subtração:

$$\pm \Delta s = \pm \left(|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \ldots \right)$$

Em resumo:

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS NA SOMA OU SUBTRAÇÃO:

$$\mathbf{s \pm \Delta s = s \pm \left(|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \ldots \right)}$$

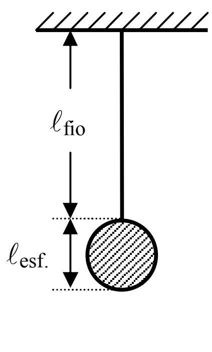
Exemplo 10: Medindo-se com uma régua milimetrada, em duas etapas, o comprimento de um tubo, foram obtidos os seguintes valores, juntamente com as incertezas adotadas pelo operador:

$$L_1 = (1{,}0000 \pm 0{,}0004)\ \text{m} \quad \text{e} \quad L_2 = (0{,}0123 \pm 0{,}0004)\ \text{m}$$

Assim, o comprimento do tubo, pelo critério mais desfavorável seria:

$$L = L_1 + L_2 = (1{,}0000 + 0{,}0123) \pm (0{,}0004 + 0{,}0004) = (1{,}0123 \pm 0{,}0008)\ \text{m}$$

Exemplo 11: Para medir o comprimento total de um pêndulo (fio + esfera) usou-se uma régua milimetrada para medir o comprimento do fio e um micrômetro para medir o diâmetro da esfera. Observam-se os valores indicados abaixo, juntamente com as incertezas adotadas pelo operador:



$$\left.\begin{array}{l} \ell_{fio} = 2{,}1000\ \text{m} \\ \ell_{esf.} = 0{,}021354\ \text{m} \end{array}\right\} \ \ell = \ell_{fio} + \ell_{esf.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\ell_{fio} = \pm\ 0{,}0005\ \text{m} \\ \Delta\ell_{esf.} = \pm\ 0{,}000002\ \text{m} \end{array}\right\} \ \text{Incertezas adotadas pelo operador}$$

A soma dos comprimentos é ℓ = 2,121354 m e a soma das incertezas absolutas é $\Delta\ \ell$ = 0,000502 m. Observe que o algarismo **3** é duvidoso, portanto, se já não existe certeza nesta casa decimal, não tem sentido apresentar os algarismos 5 e 4 no resultado da soma.

O comprimento do pêndulo será então: $L = \ell \pm \Delta\ell = (2{,}1214 \pm 0{,}0005)$ m

Observe que, neste caso, torna-se desnecessário utilizar, juntamente com uma régua, um instrumento de precisão como é o caso do micrômetro.

b) <u>Multiplicação, Divisão, Radiciação e Potenciação</u>

Estas operações poderão ser englobadas na forma de um monômio:

$F = K \cdot A \cdot B^{\alpha} \cdot C^{\beta}$

Demonstra-se teoricamente que a **incerteza relativa** $\pm$ **Δf / f** poderá ser colocada em função das incertezas relativas das grandezas que a compõe pela seguinte fórmula (critério mais desfavorável):

$$\pm \frac{\Delta f}{f} = \pm \left(\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\alpha\ \frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\beta\ \frac{\Delta c}{c}\right| \right)$$

logo, a **incerteza absoluta** será:

$$\pm \Delta f = \pm\ f \times \left(\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\alpha\ \frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\beta\ \frac{\Delta c}{c}\right| \right)$$

onde:

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \\ C = c \pm \Delta c \\ K = k \pm \Delta k = \text{uma constante que não depende de medição.} \\ f = k \cdot a \cdot b^{\alpha} \cdot c^{\beta} \quad \text{e} \quad F = f \pm \Delta f\ , \ \text{então:} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f = k \cdot a \cdot b^{\alpha} \cdot c^{\beta} \\ \mathbf{f \pm \Delta f = f \pm f \times \left(\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\alpha\ \frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\beta\ \frac{\Delta c}{c}\right| \right)} \end{gathered}} \qquad (3)$$

Uma situação simples ajuda a entender a origem da equação (3).

Seja $F = B^2$ onde $B = b \pm \Delta b$, $K = A = C = 1$ e $\alpha = 2$.

Então, $F = b^2 \pm 2\ b\ \Delta b + (\Delta b)^2$

Se Δb for uma quantidade pequena em comparação com b, podemos desprezar $(\Delta b)^2$ em comparação com $2\, b\, \Delta b$, resultando:

$$F = \underbrace{b^2}_{f} \pm \underbrace{2\, b\, \Delta b}_{\Delta f}$$

Portanto,

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm\, 2\, \frac{\Delta b}{b} = \pm\, \alpha\, \frac{\Delta b}{b}$$

O que explica a presença do fator α no terceiro termo entre parênteses da equação (3) ou o fator β do quarto termo da mesma equação.

- **Discussão de K (constante)**

A constante K poderá aparecer nas seguintes formas:

1) Número formado por quantidade finita de dígitos (número exato)
   Neste caso a incerteza absoluta é nula;
2) Número que matematicamente comporte infinitos dígitos (irracional, dízima).

Neste caso a incerteza absoluta dependerá da quantidade de dígitos adotada. Se utilizarmos uma calculadora que opere com dez dígitos, teremos π = 3,141592654. O último dígito foi arredondado pela máquina; está afetado por uma "incerteza" de uma unidade (no máximo $\Delta\pi$ = 0,000000001).

Exemplo 12:

Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma:

$R = r \pm \Delta r = (232{,}0 \pm 0{,}1)$ mm

Neste caso podemos calcular seu volume utilizando a calculadora citada acima, sem nos preocuparmos com a incerteza que afeta o número.

$V = 4/3\ \pi\ R^3$, expressão que pode ser representada por:

$V = K_1 K_2 R^3$, onde K_1 = constante exata (porquê?) e K_2 = constante irracional

$$\begin{cases} \Delta k_1 = 0 \\ \Delta k_2 = \pm\, 0{,}000000001 \\ \Delta r = \pm\, 0{,}1 \text{ mm} \end{cases}$$

De acordo com a equação (3):

$$\pm\, \frac{\Delta v}{v} = \pm\, \left(\left| \frac{\Delta k_1}{k_1} \right| + \left| \frac{\Delta k_2}{k_2} \right| + \left| 3\, \frac{\Delta r}{r} \right| \right)$$

$$\pm\ \frac{\Delta v}{v} = \pm\ \left(0 + \left| \frac{0{,}000000001}{3{,}141592654} \right| + \left| 3\ \frac{0{,}1}{232{,}0} \right| \right)$$

$$\pm\ \frac{\Delta v}{v} = \pm\ \left(0 + \left| 0{,}00000000032 \right| + \left| 0{,}00129 \right| \right)$$

$$\boxed{\pm\ \frac{\Delta v}{v} = \pm\ 0{,}00129\ \ (\text{não afetado pela "incerteza" de } \pi)}$$

Isto corresponde a dizer que o volume v apresentará incerteza de $0{,}00129 \cdot v$ correspondente a cerca de 0,13% do valor deste volume.

$v = 52\ 306\ 127\ mm^3$

$\pm\ \Delta v = \pm\ (0{,}00129\ X\ 52\ 306\ 127) \rightarrow\ \pm\ \Delta v = \pm\ 67\ 475\ mm^3$

A incerteza nos mostra que não é necessário escrever o número após o quarto algarismo.

A maneira de apresentar este resultado é :

$\boxed{\mathbf{v \pm \Delta v = (5{,}231 \pm 0{,}007).10^7\ mm^3}}$ (em notação científica)

O valor coerente do volume seria então, $v = 5{,}231X10^7\ mm^3$, ou seja, com 4 algarismos significativos.

No caso de efetuarmos uma única medida, a mesma será considerada como representativa do valor real.

c) Outros Casos: Argumentos de Funções[2]

Nas situações em que os dados forem utilizados como argumento de funções, como sen(x), cos(x), log(x), x^n, e $x^{1/n}$, etc., deve-se calcular a incerteza resultante do valor da função no intervalo $x \pm \Delta x$ da seguinte forma:

- Calcule os extremos superior ($f_{sup.}$) e inferior ($f_{inf.}$) da função no intervalo $x \pm \Delta x$, isto é, calcule o valor da função em $x + \Delta x$ e em $x - \Delta x$, chamando a estes resultados de $f_{sup.}$ e $f_{inf.}$.
- Obtenha, então, o valor da função com a respectiva incerteza, $f \pm \Delta f$, aplicando a seguinte expressão:

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS DE ARGUMENTOS DE FUNÇÕES:
$\mathbf{F = f \pm \Delta f = [\ ½\ (f_{sup.} + f_{inf.})\ ]\ \pm\ [\ ½\ (f_{sup.} - f_{inf.})\ ]}$

- Após obter $F = f\ \pm \Delta f$ trate o número obtido da mesma forma que foi feito nas situações anteriores.

[2] O procedimento de cálculo que recomendamos visa explorar os recursos das calculadoras. O incremento **Δf,** quando **x** vai a **x + Δx,** é obtido rigorosamente através da **derivada primeira de f(x) multiplicada por Δx.**

Exemplo 13:

a) $F = (25 \pm 5)^{1/20}$

$$\begin{cases} f_{sup.} = (25 + 5)^{1/20} = 1{,}1853758 \\ f_{inf.} = (25 - 5)^{1/20} = 1{,}1615864 \end{cases}$$

$F = 1{,}17348 \pm 0{,}01189 \;\rightarrow\; \boxed{F = f \pm \Delta f = (1{,}17 \pm 0{,}01)}$

b) $F = \cos\,(30{,}0 \pm 0{,}2)^{o}$

$$\begin{cases} f_{sup.} = \cos\,(30{,}0 - 0{,}2)^{o} = \cos\,(29{,}8)^{o} = 0{,}8677655 \\ f_{inf.} = \cos\,(30{,}0 + 0{,}2)^{o} = \cos\,(30{,}2)^{o} = 0{,}8642748 \end{cases}$$

$F = 0{,}86602 \pm 0{,}00175 \rightarrow \boxed{F = f \pm \Delta f =(0{,}866 \pm 0{,}002) = (8{,}66 \pm 0{,}02).10^{-1}}$

c) $F = (2{,}345630 \pm 0{,}000008)^{20}$

$$\begin{cases} f_{sup.} = (2{,}345638)^{20} = 25422589 \\ f_{inf.} = (2{,}345622)^{20} = 25419121 \end{cases}$$

$F = 25420855 \pm 1734 \;\rightarrow\; \boxed{F = f \pm \Delta f = (2{,}5421 \pm 0{,}0002).10^{7}}$

1.5. ERROS ACIDENTAIS

Como vimos, por mais perfeito que seja o operador ou o processo de medição de uma grandeza, nunca deixaremos de contar com os fatores acidentais que afetam uma ou mais medidas.

Os principais fatores que implicam no aparecimento dos erros acidentais ou ao acaso e são responsáveis pelas incertezas das medidas são:

a) Defeitos não sistemáticos de leitura (imperícia do operador);
b) Variação da capacidade de avaliação, com o número de medidas efetuadas;
c) Variação da capacidade de avaliação ou da perícia, no caso da observação de uma mesma grandeza por vários observadores;
d) Condições próprias dos aparelhos de medidas (certos aparelhos dão erros de paralaxe que variam com o tamanho da grandeza);
e) Reflexos variáveis do operador (por exemplo no caso de apertar um cronômetro);
f) Dificuldades na obtenção de certas medidas (ajuste do zero de uma escala, aplicação de um aparelho a uma peça em diferentes posições);
g) Interesse do operador em obter medidas em situações diferentes para obtenção de um valor mais representativo de uma grandeza (no caso, por exemplo, da medida do diâmetro de uma esfera);
h) Outros fatores não intencionais, tais que não possam ser considerados como falta grave de operação;

1.6. CÁLCULOS SEM PROPAGAÇÃO DAS INCERTEZAS

1.6.1. Algarismos Significativos nos Resultados

Quando se trabalha com uma grandeza **sem explicitar a sua incerteza**, é preciso ter em mente a noção exposta no texto referente ao conceito de algarismo significativo. Mesmo que não esteja explicitada, você sabe que a **incerteza afeta "diretamente" o último dígito** de cada número.

Para verificar esta afirmação, sugerimos que se assinale com um traço todos os algarismos cuja ordem seja superior ou igual à ordem de grandeza da incerteza.

Nos exemplos abaixo, considere significativos os algarismos assinalados:

a) $\overline{186},3 \pm 1,7 \quad \rightarrow \quad \overline{186} \quad$ ou $\quad 1,86.10^2$

b) $45,37 \pm 0,13 \quad \rightarrow \quad 45,4 \quad$ ou $\quad 4,54.10$

c) $\overline{25231} \pm 15 \quad \rightarrow \quad \overline{25231}$ ou $\quad 2,523.10^4$

d) $6 \pm 0,002 \quad \rightarrow \quad \overline{6,000} \pm 0,002 \quad \rightarrow \quad 6,000$

As operações que você efetuar com qualquer grandeza darão como resultado um número que tem uma quantidade "bem definida" de algarismos significativos.

1.6.2. Multiplicação e Divisão

> Mantém-se no resultado uma quantidade de algarismos idêntica à da grandeza com menor número de dígitos significativos

Exemplo 14: $2,3 \times 3,1416 \times 245 = 1,8.10^3$

O produto dos três números deu como resultado $1,7702916 \text{ X } 10^3$; mantivemos, todavia, apenas dois algarismos em virtude da grandeza representada pelo número 2,3 ter apenas dois algarismos significativos.

O número 1,7702916 foi arredondado para 1,8 porque seu terceiro dígito (7) é maior do que 5.

1.6.3. Adição e Subtração

> - **Exprime-se a soma e/ou subtração dos números, fatorando-se a maior potência de dez;**
> - **Verifica-se, então, qual desses números tem o algarismo duvidoso de maior ordem;**
> - **O algarismo duvidoso do resultado estará nessa mesma ordem.**

Exemplo 15:

a) $2,247 \times 10^3 + 3,25 \times 10^2 = (2,247 + 0,325) \times 10^3 \rightarrow 2,572 \times 10^3$

Neste exemplo, os algarismos duvidosos em cada uma das parcelas pertencem à mesma ordem, à dos milésimos.

b) $3,18 \times 10^4 + 2,14 \times 10^2 = (3,18 + 0,0214) \times 10^4 = 3,2014 \times 10^4 \rightarrow 3,20 \times 10^4$

Observe que os algarismos duvidosos em 3,18 e 0,0214 pertencem a ordens distintas: respectivamente centésimos e décimos de milésimos. Neste caso, o resultado da soma será significativo até a ordem dos centésimos apenas.

$2550,0 + 0,75 = 2550,75 \rightarrow 2550,8$

Aqui o número 0,75 foi arredondado para 0,8. Observe que os algarismos duvidosos em 2550,0 e 0,75 também pertencem a ordens distintas, décimos e centésimos, respectivamente. O resultado da soma será significativo até a ordem dos décimos.

1.6.4. Regra para os arredondamentos

Como regra geral adiciona-se uma unidade ao último algarismo significativo, se o dígito seguinte a ele for maior ou igual a 5. Mantém-se o último algarismo significativo inalterado se o dígito seguinte a ele for menor do que 5.

ATENÇÃO

- Após identificar os algarismos significativos, assinale-os e efetue os cálculos com um ou mais algarismos além dos necessários. Porém, não perca de vista o número de algarismos significativos resultantes de cada operação intermediária, assinalando-os também.

- Na apresentação dos resultados devem permanecer apenas os algarismos significativos, isto é, os assinalados com um traço. Observe ainda que, dentre os algarismos assinalados como significativos, a **incerteza afeta "diretamente" o de menor ordem**.

- Note, por exemplo, **que se a incerteza for maior do que 5 unidades nesta menor ordem**, necessariamente o algarismo de ordem precedente a esta será também afetado. Em vista disto, ao comparar dois valores resultantes de cálculos, os quais você espera que sejam iguais, **os algarismos de ordem precedente à última podem eventualmente diferir de uma unidade.**

CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS

2.1. INTRODUÇÃO

A apresentação de dados numéricos na forma de gráfico é uma técnica usada em muitas áreas, não somente por físicos e engenheiros.

A larga utilização de gráficos (dados tabulados dispostos num plano cartesiano) deve-se à facilidade de obtenção de informação a partir deles. Os gráficos permitem uma visualização imediata do comportamento das variáveis do fenômeno estudado. Por exemplo, o gráfico da figura 1 foi construído a partir dos dados apresentados na tabela 1.

Tempo (s)	Velocidade (cm/s)
8	0,8
13	1,3
16	2,3
20	3,2
25	4,3
30	4,7
34	3,9
35	3,2
37	2,7
40	1,7
42	1,2
46	0,7

Tabela 1: Velocidade de um corpo em função do tempo.

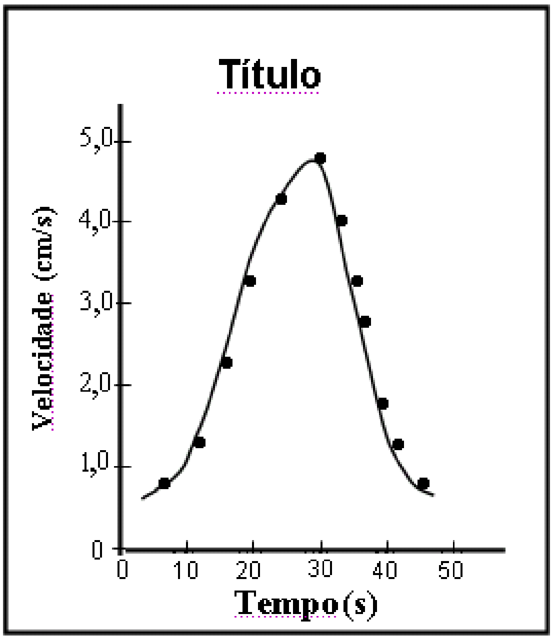


Fig.1: Gráfico da velocidade de um corpo em função do tempo.

Pode-se verificar a facilidade de obtenção de informações através do gráfico comparado com a tabela. Além deste aspecto, existem duas outras vantagens na utilização de gráficos:

a) Geralmente é possível obterem-se rápida e facilmente, através da análise gráfica, informações cuja obtenção por outras técnicas poderiam ser trabalhosas. Por exemplo, considere o problema da determinação analítica, através da tabela 1, do instante para o qual a velocidade é máxima, e do valor dessa velocidade. Por outro lado, é simples obter-se estas respostas através do gráfico. A utilização de gráficos constitui uma maneira muito fácil de se obter outros valores das variáveis dependentes e independentes, através de interpolação e extrapolação.

b) As técnicas de gráfico são extremamente úteis na comparação de dados teóricos e experimentais. Isto pode ser realizado de duas maneiras:

b_1) Através do gráfico traçado a partir de dados experimentais, podemos estabelecer a relação matemática entre as variáveis e compará-la com a relação teórica;

b_2) Podemos traçar a curva teórica e a experimental num mesmo sistema de eixos e então compará-las.

Nos dois casos qualquer discrepância entre teoria e experimento é facilmente observada.

Em trabalho científico, é freqüente o uso de escalas logarítmicas para se testar a hipótese de que existe uma relação de potência entre as variáveis dependente e independente e, conseqüentemente, obter-se o valor dessa potência. Discutiremos também esse tipo de escala.

2.2. ASPECTOS QUE DEVEM SER OBSERVADOS NA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

a) Título

O gráfico deverá conter todas as informações necessárias à sua compreensão, de tal modo que seja auto-suficiente, evitando dessa forma que se leia todo o texto no qual está inserido para se saber do que se trata.

Deve-se escolher um título conciso e auto explicativo.

b) Os eixos

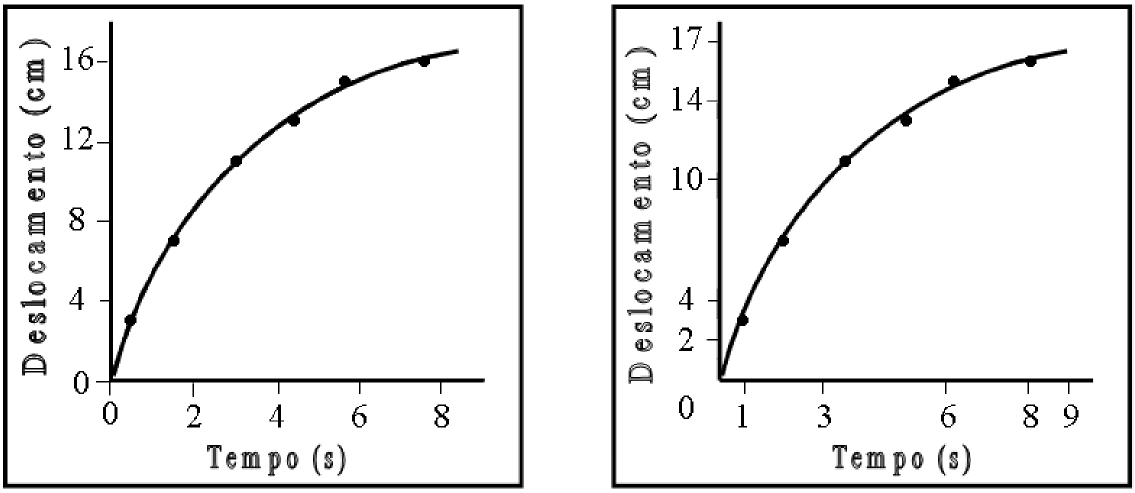
É **norma universal** colocar a variável independente no eixo das abcissas e, a dependente no das ordenadas. Inverter a norma de colocação das variáveis dependentes e independentes não invalida o gráfico, porém essa prática não é desejável porque introduz dificuldades desnecessárias.

Escreve-se o nome das grandezas lançadas, nos eixos das abcissas e das ordenadas, respectivamente.

No gráfico, três coisas precisam estar claras em relação a cada eixo:

1) **O nome da grandeza física a ser colocada no eixo:** a grandeza física é escrita, por extenso, abaixo da abcissa (a variável independente) e ao longo da ordenada (a variável dependente);
2) **As unidades empregadas:** as unidades devem ser escritas nos eixos, logo a seguir às grandezas físicas e separadas destas por vírgula ou parênteses;
3) **Os valores numéricos da grandeza representados por intervalos adequados ao longo dos eixos:** os valores numéricos lançados nos eixos devem ser representados por intervalos iguais, múltiplos da unidade escolhida, como mostra a figura 2 (a).

A figura 2 (b) mostra o mesmo gráfico onde os valores numéricos nos eixos estão indicados de <u>modo incorreto</u>. Esta é uma <u>prática ruim</u> porque pode levar o leitor a pensar que a escala não é linear, quando na verdade ela o é.



a) modo correto b) modo incorreto

Fig. 2: Modo de se indicar os valores numéricos ao longo dos eixos

Quando for necessário ressaltar algum ponto, além de representar a unidade, indique estes pontos da maneira mostrada na figura 3.

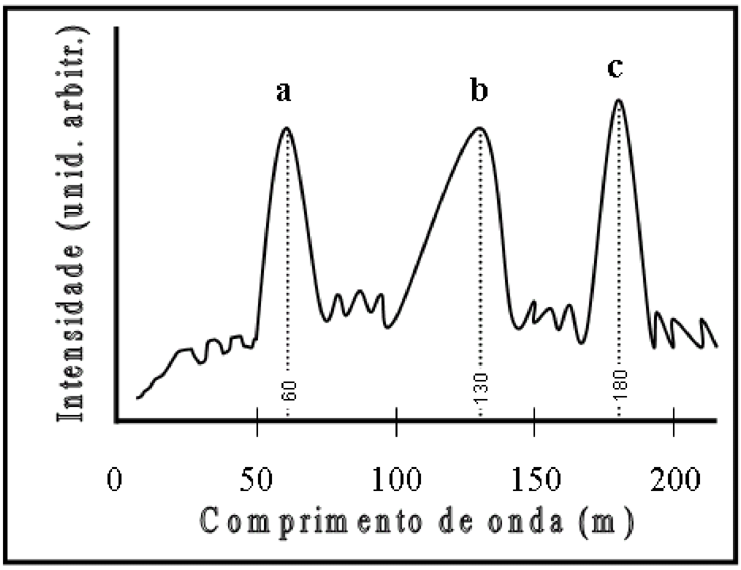


Fig. 3: <u>Espectro</u> do <u>arco</u> voltaico. Note <u>que</u> <u>alguns</u> <u>pontos</u> foram ressaltados.

c) <u>Escala</u>

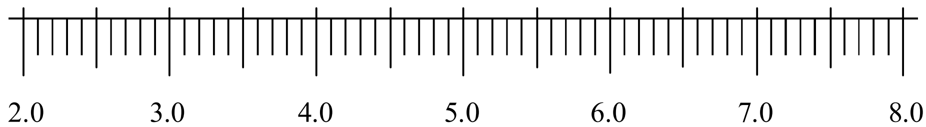
Deverá estar de acordo com os algarismos significativos dos dados e deverá ser escolhida de maneira que **facilite a interpolação** e que permita que todos os pontos experimentais fiquem contidos no papel, de forma a que o **gráfico ocupe todo o papel e não fique comprimido em um canto**.

As escalas devem ser de fácil leitura; para tanto <u>sugerimos</u> a seguinte regra:

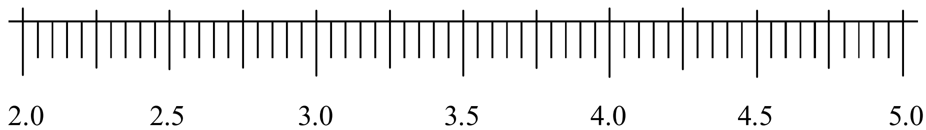
- À variação de uma unidade do algarismo menos significativo da escala (o de menor ordem) faça corresponder 1, 2, 5 ou 10 divisões no papel milimetrado, de forma que o gráfico ocupe a maior área possível no papel, além de facilitar a leitura de valores intermediários.

Veja os exemplos a seguir (a experiência forneceu dois algarismos significativos):

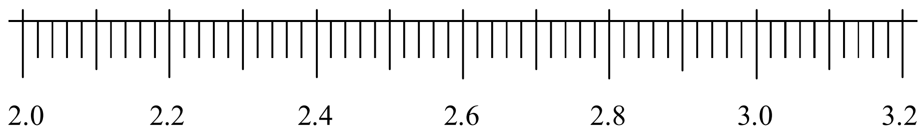
a)



b)



c)



O gráfico ocupará maior extensão do papel no caso c); veja as posições ocupadas pelos números 2,0 e 3,0 nos casos a), b) e c).

d) <u>Barras de incertezas</u>

Os valores experimentais deverão ser representados com suas respectivas incertezas indicadas por meio de **barras simétricas em relação ao ponto** assinalado e de **comprimento total igual ao dobro da incerteza**. Veja a figura 4.

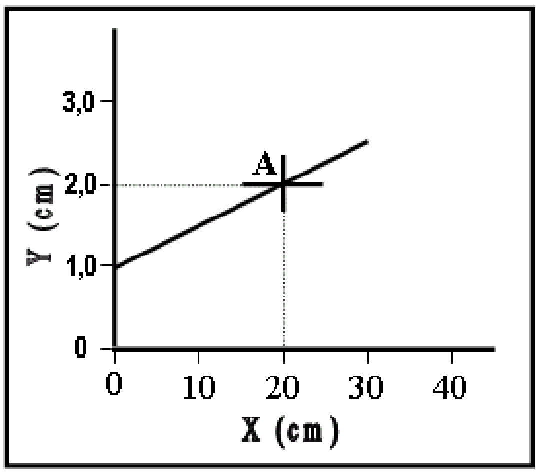


Fig. 4: Barras de Incerteza.

Ponto A:

$$\begin{cases} x \pm \Delta x = (20 \pm 5)\ \text{cm} \\ y \pm \Delta y = (2{,}0 \pm 0{,}3)\ \text{cm} \end{cases}$$

2.3. ANÁLISE GRÁFICA

A análise gráfica é muito útil, pois permite, em muitos casos, descobrir a lei que rege um fenômeno físico. O conhecimento dessas leis é muito importante para a elaboração de modelos teóricos que expliquem o fenômeno.

Imagine que estivéssemos tentando verificar como varia o comprimento (L) de uma barra metálica em função da temperatura (T). A fórmula que dá o novo comprimento da barra após um acréscimo δT na temperatura é:

$$\boxed{L = L_0 (1 + \alpha\, \delta T) = L_0 + \alpha\, L_0\, \delta T} \quad (4)$$

Sabemos que, em escalas lineares, uma reta é sempre descrita por uma equação do tipo:

$$\boxed{\mathbf{Y = m\, X + b}} \qquad (5)$$

A inclinação da reta fornece o valor do **coeficiente angular (m)** da reta.

A interseção da reta com o eixo dos Y fornece o valor de **b**, o **coeficiente linear** da reta, se o eixo Y passar por x = 0.

Comparando a expressão (4) com a (5) vemos a correspondência entre suas respectivas variáveis e parâmetros constantes:

L	----------	Y	(variável)
δT	----------	X	(variável)
L_0	----------	b	(constante)
$\alpha\, L_0$	----------	m	(constante)

<u>Note que só podemos determinar equações de retas com papéis que tenham escalas lineares</u>, como o milimetrado, por exemplo.

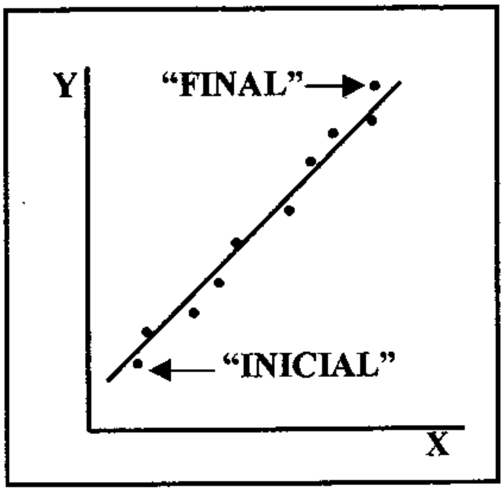
Os parâmetros que determinam a equação de qualquer outro tipo de curva não podem ser obtidos facilmente com esse tipo de papel. Outros tipos de papéis com escalas monologarítmicas e dilogarítmicas são utilizados nesses casos.

Chamamos a atenção para o fato de que a inclinação da reta, tg(Θ), dependerá da particular escala adotada nos eixos, <u>mas o valor do coeficiente angular não depende da escala adotada</u>.

Para a determinação do coeficiente angular da reta ($m = \alpha\ L_0$) deve-se, portanto, levar em conta a escala utilizada.

Os pontos obtidos na experiência devem ser marcados no papel milimetrado.

Traça-se a seguir uma reta média (fig. 5). Os métodos analíticos para a obtenção desta reta não serão estudados nesta disciplina.



<u>Reta média</u>
é a reta mais provável e ela não passa necessariamente sobre os pontos marcados no papel, nem mesmo sobre os pontos “inicial” e “final”.

Fig. 5: Reta Média

A reta média deve ser traçada usando-se uma régua transparente;

- As escalas devem ser construídas conforme as instruções contidas nas folhas anteriores deste texto, referentes à construção e interpretação de gráficos;
- O número de algarismos escritos na escala deverá corresponder ao número de algarismos significativos obtidos na experiência, exceto nos casos em que a menor divisão do papel não o permita.

2.3.1. Coeficiente angular da reta média

Para avaliar o coeficiente angular da reta média escolha dois pontos sobre a reta conforme sugerem os pontos **P** e **Q**, na figura 6.

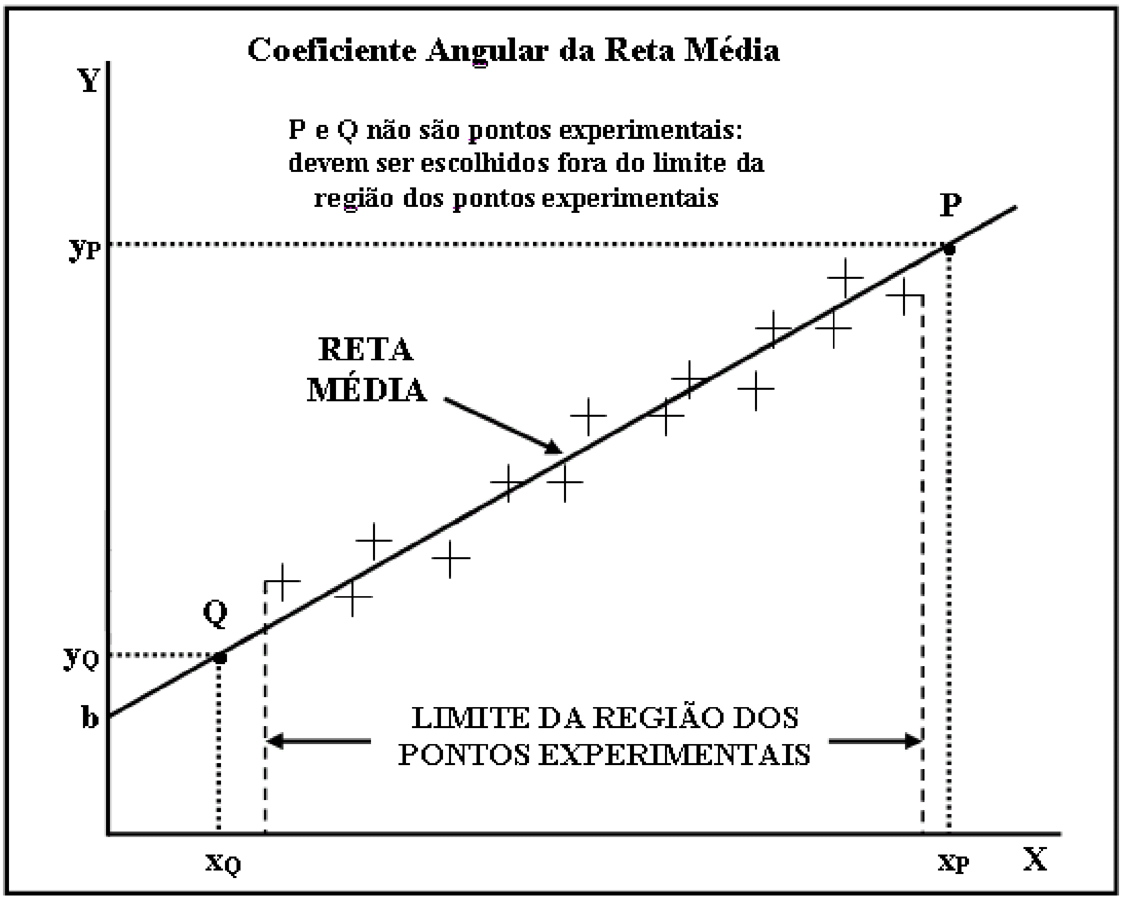


Figura 6: Coeficiente angular da reta média $m = (y_P - y_Q)/(x_P - x_Q)$

P e **Q** devem ser marcados **fora** da região delimitada pelos pontos experimentais, de forma a obter-se **m** com maior quantidade de algarismos.

O coeficiente angular da reta será dado por:

$$\boxed{m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}}$$

2.3.2. INCERTEZA DO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA MÉDIA

Para estimar a incerteza no coeficiente angular da reta média considere as **duas diagonais** do quadrilátero **ABCD** como mostra a figura 7.

Para obter os segmentos de reta **AB** e **CD** proceda da seguinte forma:

a) Assinale em cada janela de incerteza o **vértice mais distante da reta média**: **resultará um conjunto de pontos acima da reta média e outro abaixo**.

b) O conjunto de pontos que ficou **acima** da reta média permite traçar **uma reta média auxiliar** e determinar o segmento **AB pela interseção desta reta com as verticais traçadas por** x_i **e** x_f. O segmento **CD** será obtido de forma análoga.

c) Então, calcule ± **Δm** a partir dos **coeficientes angulares das duas diagonais**, BD e CA, do quadrilátero ABCD.

$$\pm \Delta m = \pm \tfrac{1}{2} (m_{sup.} - m_{inf.}) \quad , \text{ sendo } \begin{cases} m_{sup.} = (y_B - y_D) / (x_f - x_i) \\ \text{e} \\ m_{inf.} = (y_C - y_A) / (x_f - x_i) \end{cases}$$

Substituindo-se **m** $_{sup.}$ e **m** $_{inf.}$ na expressão de ± **Δm** definida acima, obtém-se:

$$\boxed{\pm \Delta m = \pm \frac{1}{2} \frac{(y_A - y_D) + (y_B - y_C)}{x_f - x_i}} \qquad (6)$$

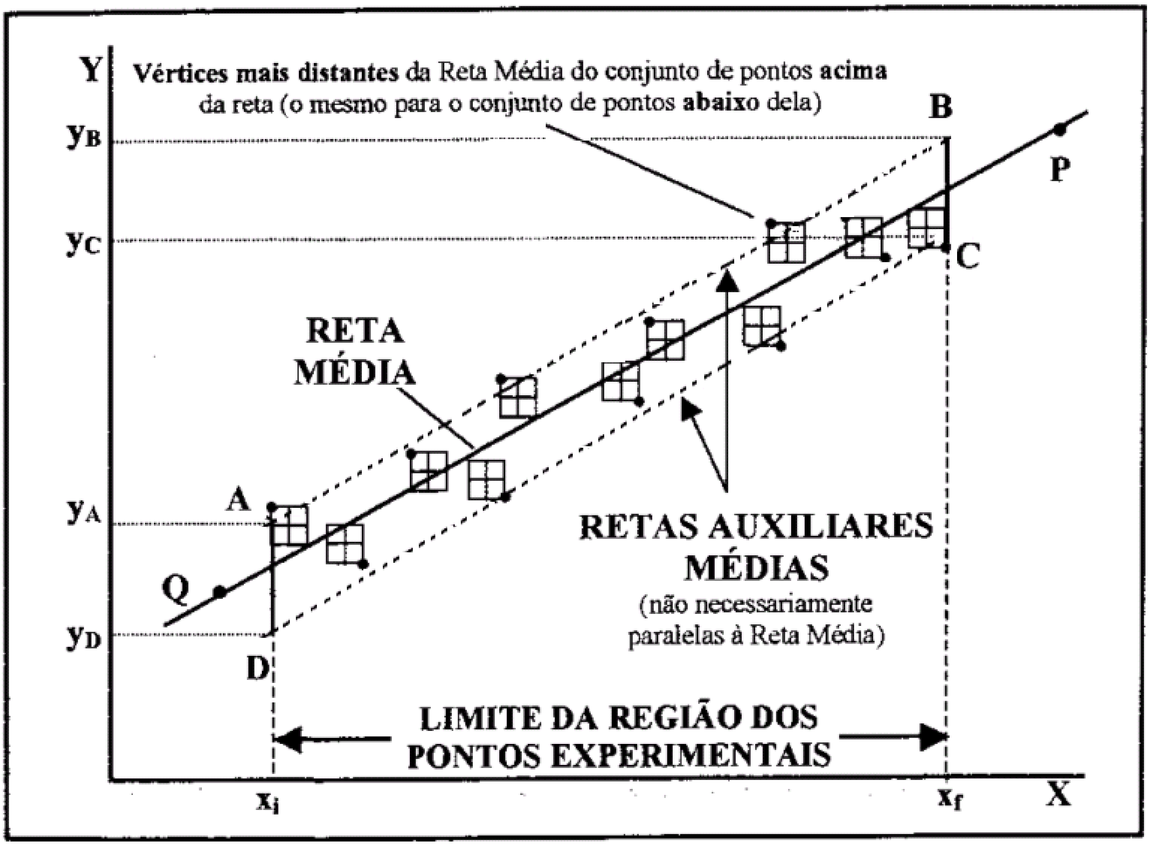


Fig. 7: Incerteza do coeficiente angular da reta média (± Δm)

2.3.3. Incerteza do Coeficiente Linear da Reta Média (± Δb)

No gráfico da figura 7, prolongando-se as duas diagonais **AC** e **BD** do quadrilátero ABCD, até que elas interceptem o eixo Y, obtem-se dois pontos neste eixo que chamaremos, respectivamente, de $\mathbf{b}_{\mathbf{sup.}}$ e $\mathbf{b}_{\mathbf{inf.}}$.

A **incerteza do coeficiente linear** da reta média será dada por:

$$\pm \Delta b = \pm \frac{1}{2}(b_{\sup} - b_{\inf})$$

2.3.4. Casos particulares de cálculo da Incerteza do Coeficiente Angular

<u>Caso a</u>: As barras de incerteza nas medidas de x e y são todas iguais e a reta média passa sobre todos os pontos experimentais.

Neste caso, nas medidas de x e y, os erros acidentais são desprezíveis ou nulos.

O coeficiente angular da reta pode ser obtido diretamente dos pontos inicial e final utilizando-se a expressão para determinar o coeficiente angular dessa reta com os pontos P e Q substituídos por F (último ponto à direita) e I (primeiro à esquerda):

$$m = \frac{(y_F - y_I)}{(x_F - x_I)}$$

Esta expressão é do tipo $m = (a \pm \Delta a)\,(b \pm \Delta b)^{-1}$, com:

$a = Y_F - Y_I$
$b = X_F - X_I$
$\Delta a = \Delta Y_F + \Delta Y_I$
$\Delta b = \Delta X_F + \Delta X_I$

Observe-se que utilizamos o critério mais desfavorável, somando as incertezas na subtração de duas grandezas, como estudamos anteriormente (página 6).

Utilizando a expressão (3) para a propagação de incertezas (página 11):

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad \text{ou seja,}$$

$$\Delta m = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) m = \left(\frac{\Delta y_F + \Delta y_I}{y_F - y_I} + \frac{\Delta x_F + \Delta x_I}{x_F - x_I}\right) \frac{y_F - y_I}{x_F - x_I}$$

$$\Delta m = \frac{\Delta y_F + \Delta y_I}{x_F - x_I} + m\,\frac{\Delta x_F + \Delta x_I}{x_F - x_I}$$

Se as incertezas no valor de cada grandeza forem iguais, isto é, se $\Delta y_P = \Delta y_Q = \Delta y$ e $\Delta x_P = \Delta x_Q = \Delta x$, obtemos para a incerteza do coeficiente angular da reta média nesta situação específica:

$$\pm \Delta m = \pm \frac{2\left(\Delta y + m\,\Delta x\right)}{x_F - x_I} \qquad (7)$$

A equação (7) poderá ser utilizada apenas no caso de <u>todos</u> os pontos caírem sobre a reta; a equação (7) é muito útil quando <u>não é possível</u> traçar as barras de incerteza, se elas forem menores do que a menor divisão da escala, por exemplo. Se as incertezas forem diferentes entre si, Δy e Δx serão as médias aritméticas dos vários valores de Δy e/ou Δx.

<u>Caso b</u>: As barras de incerteza nas medidas de x e y são todas nulas (incertezas menores que a menor divisão da escala adotada), e a reta média não passa sobre todos os pontos experimentais (figura 8).

Neste caso, para se determinar a incerteza do coeficiente angular, traçam-se duas **retas médias auxiliares** com os conjuntos de pontos que caem **fora da reta média**, como mostra a figura 8, isto é:

- uma reta média auxiliar passando pelo conjunto de pontos **acima** da reta média;
- a outra passando pelo conjunto de pontos **abaixo** da reta média.

Tal como anteriormente (figura 7), podemos obter o quadrilátero ABCD e a expressão para a incerteza do coeficiente angular da reta média ($\pm\ \Delta m$) que será dada, também, pela equação já estudada (6).

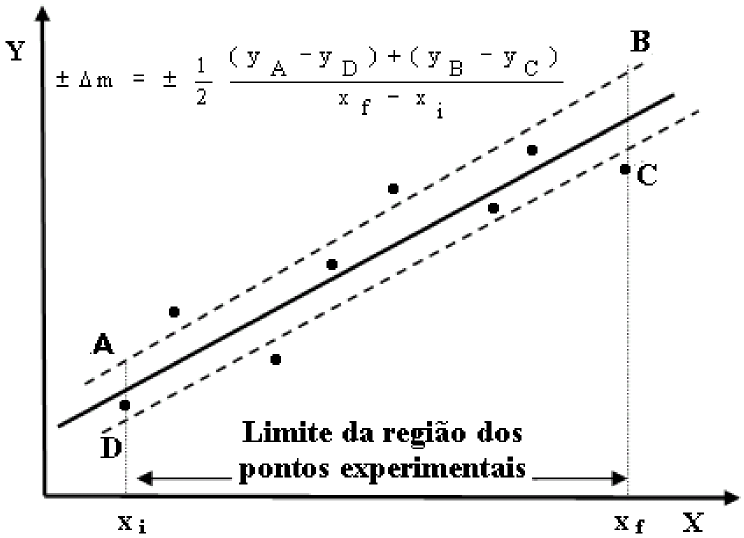


Figura 8: Gráfico para determinação da incerteza do coeficiente angular da reta média, quando não é possível traçar as barras de incerteza e existem pontos experimentais fora da reta.

2.4. GRÁFICOS EM PAPEL MONO-LOG[3]

O gráfico da figura 9 representa a função:

$$\boxed{\log(Y) = \log(Y_0) + \lambda X}$$

Escolhe-se para origem de Y uma potência de dez ($10^{\pm N}$). No exemplo da figura 9 escolheu-se o valor 0,10 para origem de Y.

A escala no eixo Y foi construída de tal forma que a distância de qualquer ponto deste eixo até a origem é proporcional à diferença entre log (Y) e log (0,10). Observe que Y nunca se anula nesta escala. Porquê?

O eixo log (Y) não existe no papel mono-log. A escala no eixo log (Y) é linear e foi desenhada apenas para esclarecer a construção da escala Y, que é não linear.

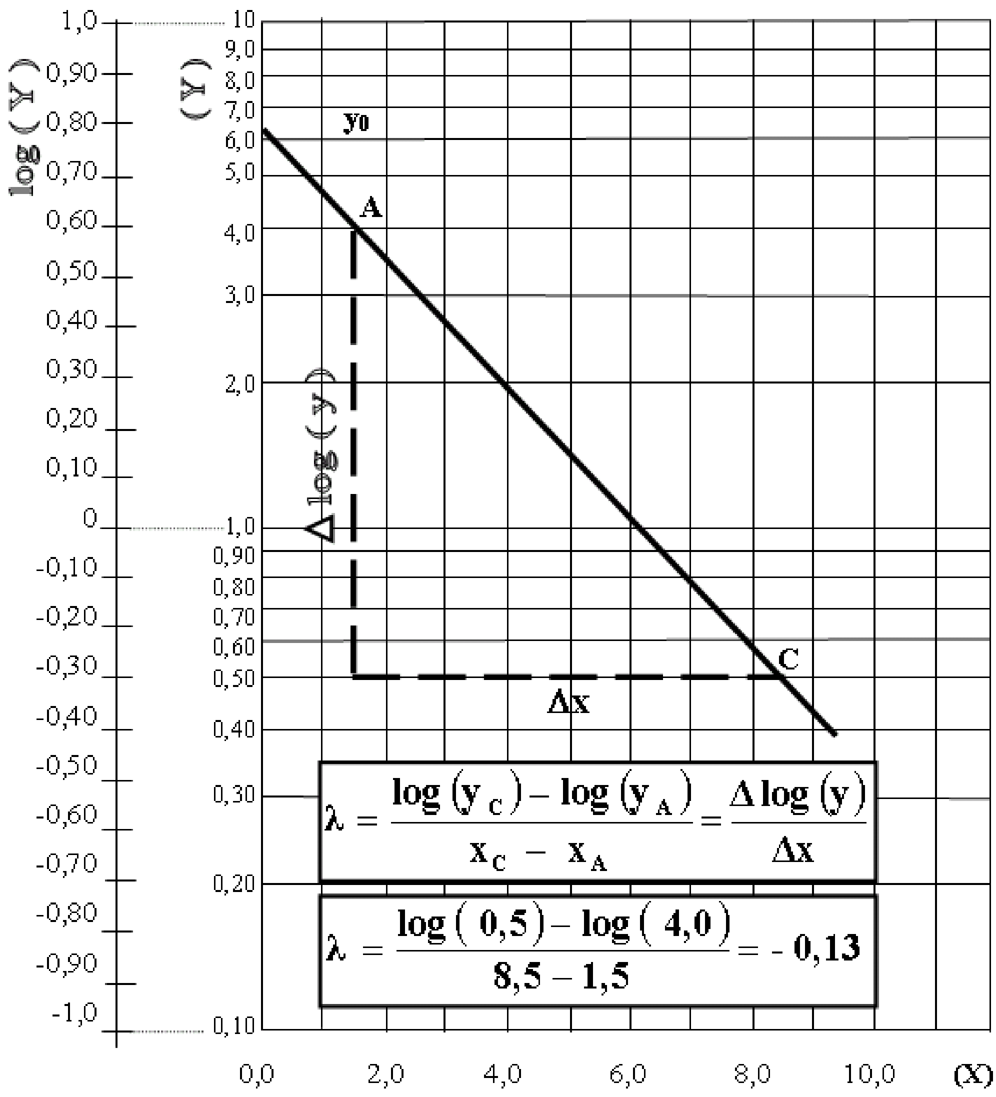


Fig. 9: Gráfico em papel monolog: coeficiente angular da reta média

[3] No texto nos referimos a logaritmos na base 10; os logaritmos podem ser convertidos para a base e.

A cada número gravado na escala Y corresponde, na escala linear log(Y), outro número: o logaritmo de Y na base 10.

No cálculo do coeficiente angular da reta **(λ)**, é preciso considerar que o comprimento de um dos catetos do triângulo, representa a diferença entre dois logaritmos (figura 9).

De que forma você poderá obter a incerteza do coeficiente angular da reta, ± Δλ, nesta escala?

Seguem-se todos os procedimentos para a determinação da incerteza do coeficiente angular da reta média em papel milimetrado, o que inclui desenhar as barras de incerteza e as retas auxiliares médias, e faz-se a adaptação necessária na equação (6), **substituindo-se** os valores de y_A, y_B, y_C e y_D pelos respectivos logaritmos.

RECOMENDAÇÕES IMPORTANTES: RESUMO

- **Número de Algarismos:**
- Nos cálculos intermediários usar, no mínimo, três algarismos "significativos" em excesso nas incertezas.
- Os resultados anteriores aos arredondamentos devem ser guardados para os outros cálculos.
  Na apresentação dos resultados finais, apresentar a incerteza com UM único algarismo significativo.
- **Os gráficos devem conter:**
  - **Título (conciso e bem explicativo);**
  - **Os nomes das grandezas físicas, escritos por extenso, lançados ao longo dos eixos (variável independente no eixo das abcissas e a dependente no das ordenadas);**
  - **A indicação das unidades dessas grandezas, separadas dos nomes das grandezas por uma vírgula ou parênteses;**
  - **Os valores numéricos lançados nos eixos, representados por intervalos iguais;**
  - **A indicação das escalas utilizadas.**

  Na construção das escalas:
  - **Deve-se escolher a escala de forma a que o gráfico ocupe a maior região possível do papel;**
  - **Deve-se utilizar o menor n.º de algarismos compatível com os dados ou a menor divisão do papel.**

ANEXO

A VELOCIDADE DA LUZ E O METRO PADRÃO

O melhor valor obtido para a velocidade da luz no vácuo, até outubro de 1983, era 299.792.458 m/s e estava afetado por uma incerteza de ± 1,2 m/s. Esta incerteza, de 4 partes em 10^9, era quase inteiramente devida às limitações do metro padrão.

Adotava-se desde 1960 o comprimento de onda da luz vermelho-alaranjada do criptônio 86 como padrão de comprimento, e a partir dele definia-se o metro.

O padrão de tempo (o segundo) no entanto, podia ser determinado com **uma incerteza de uma parte em 10^{13}** (um segundo em 300.000 anos), usando-se o "relógio de Césio".

As dificuldades que impediam de se melhorar as medidas do comprimento até 1983, foram removidas em outubro daquele ano pela Conferência Geral de Pesos e Medidas, reunida em Paris. Naquela ocasião decidiu-se abandonar o padrão de comprimento baseado na luz do criptônio e redefinir o metro a partir da unidade de tempo.

UM METRO, É A DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA LUZ NO VÁCUO DURANTE UM INTERVALO DE TEMPO DE UM SEGUNDO DIVIDIDO POR 299.792.458

Adotou-se um único padrão para as medidas de tempo e de comprimento: o **"relógio de Césio"**.

**A velocidade da luz no vácuo, que é uma constante universal,
passou a valer 299.792.458 m/s, por definição.**

EXERCÍCIOS

1) São dados:

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a = (\,1{,}60 \pm 0{,}01) \\ B = b \pm \Delta b = (\,3{,}15 \pm 0{,}07) \\ C = c \pm \Delta c = (\,2{,}8037 \pm 0{,}0002) \end{cases}$$

Calcule, **algebricamente** e depois **numericamente**, com incerteza:

a) $A + B$ **b)** $A - C$ **c)** AB **d)** $A + BC$

e) $A + \dfrac{B}{C}$ **f)** $\sqrt{A^3} + B\,C^2$ **g)** $\dfrac{A}{\sqrt{B}} + C$

h) cos (A) com A em graus **i)** cos (A) com A em radianos

j) ln (B) **k)** log (B)

---

2) Calcular com o n.º correto de algarismos significativos e dar a resposta em **notação científica**:

a) $(2{,}72 \times 0{,}0026 \times 7318\,)\,/\,(3{,}93 \times 38{,}1)$ **b)** $2{,}14 \times 10^6 + 2{,}14 \times 10^4$

c) 5473,4 mm – 4,2 m **d)** 2532 – 32

e) 35,254 m + 4,7 cm **f)** 35,254 cm + 4,7 m

g) $\pi \times e$ **h)** $\pi\,/\,V_{\text{luz no vácuo}}$

---

3) Considere a tabela abaixo. Ela apresenta as posições sucessivas de certo objeto, em movimento retilíneo e uniforme.

Tempo (s) $\pm \Delta t = \pm$ **0,0001 s**	0,1400	0,2000	0,3200	0,4400	0,5200	0,6400
Posição (mm) $\pm \Delta x = \pm$ **1 mm**	341	364	397	438	459	467

Marque os pontos em papel milimetrado, trace a reta média e obtenha a velocidade do objeto (coeficiente angular da reta). Desenhe as barras de incerteza e obtenha ($v \pm \Delta v$).
